Научная статья
УДК 517.98
10.25205/1560-750X-2024-27-2-144-155

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ТИПА МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Микаел Артурович Хачатурян

Российско – Армянский Университет, 0051, Ереван, Армения
Vmware INC, 0014, Ереван, Армения

khmikayel@gmail.com

Аннотация

В работе получены прямые и обратные теоремы вложения разных измерений(теоремы о следах) для функций из мультианизотропного пространства Соболева $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ в случае одного класса вполне правильных многогранников $\mathfrak{N}$.

Ключевые слова и фразы

вполне правильный многогранник, мультианизотропное пространство Соболева, след функции.

Для цитирования

Хачатурян М. А. Прямые и обратные теоремы вложения разных измерений для одного типа мультианизотропных пространств Соболева // Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 144-155. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-144-155

DIRECT AND INVERSE EMBEDDING THEOREMS IN DIFFERENT DIMENSIONS FOR ONE TYPE OF MULTIANISOTROPIC SOBOLEV SPACES

Michael A. Khachaturyan

Russian-Armenian University, 0051, Erevan, Armenia
Vmware INC, 0014, Erevan, Armenia

khmikayel@gmail.com

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С.144-155
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 144-155

Abstract

In this paper, we obtain direct and inverse embedding theorems of different dimensions (trace theorems) for functions from the multianisotropic Sobolev space $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ in the case of one class of completely regular polyhedron $\mathfrak{N}$.

Keywords

completely regular polyhedron, multianisotropic Sobolev space, trace of a function.

For citation

Khachaturyan M. A. Direct and inverse embedding theorems in different dimensions for one type of multianisotropic Sobolev spaces // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 2, pp. 144-155. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-144-155

§ 1. Введение и постановка задачи

Теория функциональных пространств, получивших в настоящее время название пространств Соболева, широко используется в теории дифференциальных уравнений в частных производных, математической физике и многочисленных приложениях [1]. В дальнейшем были введены разные обобщения пространств Соболева. Теория анизотропных пространств Соболева $W_p^{(l_1,l_2,\dots,l_n)}(\mathbb{R}^n)$ в случае $p = 2$ полностью разработано Л. Н. Слободецким [2, 3]. Слободецким также было введено обобщение таких пространств на дробные порядки, с помощью чего были получены прямые и обратные теоремы вложения разных измерений для этих пространств. При изучении некоторого класса гипоэллиптических уравнений, введенного Л. Хермандером, возникла необходимость изучения мультианизотропных функциональных пространств Соболева $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, определяемых с помощью вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ [4] и которые являются обобщением анизотропных пространств Соболева. Впервые пространства такого типа изучались в работах С. М. Никольского и В. П. Михайлова. Исследование этих пространств было продолжено в работах Г.Г. Казаряна. Развитию теории мультианозотропных пространств посвящён цикл работ Г.А. Карапетяна [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Данная работа является продолжением работы [11] автора, где изучаются следы функции $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ и ее обобщенных производных $D_{x_3}^s f (0 \leq s < l)$ на гиперплоскости $x_3 = a$ для одного частного типа мультианизотропного пространства $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, где трехмерный вполне правильный многогранник $\mathfrak{N}$ из себя представляет пирамиду с вершиной $(0, 0, l)$ и с основанием $\mathfrak{N}_0$. В данной работе получены результаты для более общего вида вполне правильных многогранников, обобщающие результаты работы [11].

§ 2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n–мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Q}_+$ – множества соответственно целых и рациональных неотрицательных чисел, $\mathbb{Q}_+^n$ – множество n–мерных векторов с компонентами из $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n–мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $x\xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$, $\xi^t := (\xi_1^t, \xi_2^t, \ldots, \xi_n^t)$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha := D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$, понимаемая как *обобщенная производная по С.Л. Соболеву порядка* α.

Через $S(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс Шварца быстро убывающих на бесконечности функций. Через $F[\varphi]$ и $F^{-1}[\varphi]$ обозначим соответственно прямое и обратное преобразование Фурье функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $1 \le k \le n$, $x = (x', x'')$, $\xi = (\xi', \xi'')$, где $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, и $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Частичное преобразование Фурье функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ относительно группы переменных x' и частичное обратное преобразование Фурье функции $\psi(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ относительно группы переменных ξ' будем обозначить через $F_{x'}[\varphi](\xi', x'')$ и $F_{\xi'}^{-1}[\psi](x', \xi'')$ соответственно.

Для заданного набора векторов из $\mathbb{Q}_+^n$ через $\mathfrak{N}$ обозначим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Многогранник $\mathfrak{N}$ называется *вполне правильным*, если он имеет вершину в начале координат и отличное от начала координат вершины на каждой оси координат, а внешние нормали всех $(n-1)$–мерных некоординатных граней имеют положительные компоненты. Обозначим через r^k $(k = 1, 2, \ldots, M)$ вершины многогранника $\mathfrak{N}$, отличные от нуля, которые будем называть главными вершинами. Для произвольного $m \in \mathbb{Q}_+$ через $m\mathfrak{N}$ будем обозначить вполне правильный многогранник с главными вершинами mr^k $(k = 1, 2, \ldots, M)$.

Для заданного вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ обозначим $P_{\mathfrak{N}}(\xi) := 1 + \sum_{k=1}^M (\xi^2)^{r^k}$.

Легко проверяются следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Для произвольного n–мерного вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ и числа $q > 0$ выражения $P_{\mathfrak{N}}(\xi)^q$ и $P_{q\mathfrak{N}}(\xi)$ эквивалентны, т.е. с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$ выполняется соотношение*

$$C_1 P_{\mathfrak{N}}^q(\xi) \le P_{q\mathfrak{N}}(\xi) \le C_2 P_{\mathfrak{N}}^q(\xi) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Лемма 2.2. *Если для двух n–мерных вполне правильных многогранников $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ выполняется условие $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, то с некоторой постоянной*

$C > 0$
$$P_{\mathfrak{N}}(\xi) \leq C P_{\mathfrak{M}}(\xi) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. Мультианизотропное пространство Соболева дробного порядка $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество

$$W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) := \{u : u \in L_2(\mathbb{R}^n), \ \sqrt{P_{\mathfrak{N}}(\xi)} F[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\},$$

наделенное нормой

$$\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} P_{\mathfrak{N}}(\xi) |F[u](\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Отметим, что если главными вершинами многогранника $\mathfrak{N}$ являются мультииндексы $\alpha^k \in \mathbb{Z}_n^+$, то данное нами определение дробного мультианизотропного пространства совпадает с классическим определением мультианизотропного пространства Соболева для целочисленных производных:

$$W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) := \{f : f \in L_2(\mathbb{R}^n), \ D^{\alpha^{(k)}} f \in L_2(\mathbb{R}^n) \ \forall k = 1, 2, \ldots, M\},$$

наделенное эквивалентной к выражению (2.3) нормой

$$\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=1}^{M} \|D^{\alpha^{(k)}} f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Отметим, что для любого n–мерного вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$, $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ является банаховым пространством и множество функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ (см. [11]).

§ 3. Формулировка основных результатов

Пусть $\mathfrak{N}_0 \subset \mathbb{R}^2$ вполне правильный двухмерный многогранник, $q \in (0, 1)$ некое рациональное число, s_0 и l натуральные числа, такие что $0 < s_0 < l$. Будем рассматривать трехмерный вполне правильный многогранник $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^3$, с вершиной $(0, 0, l)$ и такой, что все остальные главные вершины многогранника лежат на сечениях $\mathfrak{N}$ плоскостями $x_3 = s_0$ и $x_3 = 0$ а сечения эти в свою очередь равны соответственно многогранникам $q\mathfrak{N}_0$ и $\mathfrak{N}_0$. Нетрудно заметить, что в силу выпуклости многогранника $\mathfrak{N}$ имеем, что
$$l \leq \frac{s_0}{1 - q}. \tag{3.1}$$

Для заданного целого положительного числа $s < l$ через $\mathfrak{N}_s$ обозначим проекцию на плоскость $x_3 = 0$ сечения многогранника $\mathfrak{N}$ плоскостью $x_3 = s$ и положим $\mathfrak{A}_s := m_s \mathfrak{N}_s$, где

$$m_s := \begin{cases} 1 - \dfrac{1-q}{2(s_0 - (1-q)s)}, \text{ если } 0 \le s < s_0, \\ \\ 1 - \dfrac{1}{2(l-s)}, \text{ если } s_0 \le s < l. \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Пусть $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$ произвольная функция и s: $0 \le s < l$ целое число. Тогда для почти всех $a \in \mathbb{R}$ $D^s_{x_3} f\big|_{x_3=a} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$ причем с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящая от функции f и числа a, выполняется оценка*

$$\|D^s_{x_3} f\big|_{x_3=a}\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Теорема 3.2. *Пусть $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, s: $0 \le s < l$ целое число, $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(a)$: множество тех $\varepsilon \in \mathbb{R}$, для которых $D^s_{x_3} f\big|_{x_3=a+\varepsilon} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$. Тогда существует функция $\varphi_s \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$ такая, что выполняются следующие соотношения*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in \mathcal{E}(a)}} \|D^s_{x_3} f\big|_{x_3=a+\varepsilon} - \varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

$$\|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)},$$

где $C > 0$ константа, не зависящая от функции f и числа a. Причем если $D^s_{x_3} f\big|_{x_3=a} \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$, то φ_s и $D^s_{x_3} f\big|_{x_3=a}$ совпадают.

Теорема 3.3. *Для любого заданного набора функций $\varphi_s \in W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$, $s = 0, 1, \dots, l-1$, числа $a \in \mathbb{R}$ существует функция $f \in W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|D^s_{x_3} f\big|_{x_3=a+\varepsilon} - \varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

$$\|f\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \le C \sum_{s=0}^{l-1} \|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)},$$

где $C > 0$ константа, не зависящая от набора функций $\{\varphi_s\}$.

§ 4. Доказательство основных результатов

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 144-155
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 144-155

Замечание 4.1. В дальнейшем для простоты записи будем опускать коэффициент $1/(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ в преобразовании Фурье, так как это будет влиять лишь на константу C в формулировках теорем.

Теорема 4.1. *Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ произвольная функция, s: $0 \le s < l$ целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \le s < l$. Тогда существует $C > 0$, такое что для произвольной $a \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\|D_{x_3}^s u\big|_{x_3=a}\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} \le C\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. По определению нормы в пространстве $W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\|D_{x_3}^s u\big|_{x_3=a}\|^2_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} P_{\mathfrak{A}_s}(\xi')|F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a)|^2\, d\xi', \tag{4.2}$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$. Из свойств преобразования Фурье имеем, что

$$F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', x_3) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (i\xi_3)^s F[u](\xi', \xi_3) e^{ix_3\xi_3}\, d\xi_3. \tag{4.3}$$

Рассмотрим два случая. 1) Случай $0 \le s < s_0$. Из представления (4.3) получим

$$F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\xi_3}}{\left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}\right)^{1/2}}$$
$$\times (i\xi_3)^s \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}\right)^{1/2} \cdot F[u](\xi', \xi_3)\, d\xi_3.$$

Применяя неравенство Гёлдера и учитывая, что согласно лемме 2.2 с некоторой постоянной $C_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\xi_3^{2s}(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}) \le C_1 P_{\mathfrak{N}}(\xi)\ \forall \xi \in \mathbb{R}^3,$$

получим

$$|F_{x'}[D_{x_3}^s u](\xi', a)|^2 \le$$
$$C_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + P_{q\mathfrak{N}_0}(\xi')\xi_3^{2(s_0-s)}}\, d\xi_3 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{\mathfrak{N}}(\xi)|F[u](\xi', \xi_3)|^2\, d\xi_3.$$

Так как
$$q\mathfrak{N}_0 = \frac{qs_0}{s_0-(1-q)s}\mathfrak{N}_s,$$
то в силу леммы 2.1 с некоторой константой $C_2 > 0$ имеем

$$|F_{x'}[D^s_{x_3}u](\xi',a)|^2 \le$$
$$C_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + C_2 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{qs_0}{s_0-(1-q)s}} \xi_3^{2(s_0-s)}}\, d\xi_3 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{\mathfrak{N}}(\xi)|F[u](\xi',\xi_3)|^2\, d\xi_3.$$

Рассмотрим первый интеграл. Так как числа s_0 и s целые и $s < s_0$, то $2(s_0-s) > 1$ и этот интеграл сходится. Производя в нем замену переменной $\tau = P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-\frac{1-q}{2(s_0-(1-q)s)}}\xi_3$ и учитывая эквивалентность выражений $P_{\mathfrak{A}_s}(\xi')$ и $P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{m_s}$, окончательно с некоторой постоянной $C > 0$ получим

$$|F_{x'}[D^s_{x_3}u](\xi',a)|^2 \le \frac{C}{P_{\mathfrak{A}_s}(\xi')} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{\mathfrak{N}}(\xi)|F[u](\xi',\xi_3)|^2\, d\xi_3. \tag{4.4}$$

Из (4.4) и (4.2) немедленно следует (4.1).

2) Случай $s_0 \le s < l$. Доказательство проводится аналогичным образом с той разницей, что в представлении (4.3) нужно умножить и делить на выражение $\left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi') + \xi_3^{2(l-s)}\right)^{\frac{1}{2}}$. □

Теорема 4.2. *Для произвольного набора функций $\varphi_s \in S(\mathbb{R}^2)$, $s = 0,1,\ldots,l-1$, числа $a \in \mathbb{R}$ существует функция $u \in S(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$D^s_{x_3}u\big|_{x_3=a} = \varphi_s,\ \ s = 0,1\ldots l-1, \tag{4.5}$$

$$\|u\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \le C\sum_{s=0}^{l-1}\|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.6}$$

где $C > 0$ константа, независящая от набора функций $\{\varphi_s\}$ и числа a.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $a = 0$. Пусть $\psi_s \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $s = 0,1,\ldots,l-1$ функции, для которых $\psi_s^{(j)}(0) = 0$ $\forall j < l, j \ne s$ и $\psi_s^{(s)}(0) = 1$. Введем функции

$$f_s(x_1,x_2,x_3) := F^{-1}_{\xi'}[\psi_s(x_3 \cdot P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s})P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-s(1-m_s)}F[\varphi_s](\xi')]$$
$$s = 0,1,\ldots,l-1,$$

принадлежащих пространству $S(\mathbb{R}^3)$. Легко проверить, что функции f_s удовлетворяют следующим условиям:

$$D^j_{x_3} f_s(x)\big|_{x_3=0} = 0, \text{ для } \forall j < l, j \neq s$$

$$D^s_{x_3} f_s(x)\big|_{x_3=0} = \varphi_s(x').$$

Покажем, что существют константы $C_s > 0$, $s = 0, 1, \ldots, l-1$, такие что

$$\|f_s\|_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \leq C_s \cdot \|\varphi_s\|_{W_2^{\mathfrak{A}_s}(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.7}$$

Для преобразования Фурье функции f_s имеем

$$F[f_s](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\xi} F^{-1}_{\xi'}[\psi_s(x_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s}) F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-s(1-m_s)}]\, dx$$
$$= F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-s(1-m_s)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix_3\xi_3} \psi_s(x_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s})\, dx_3.$$

В последнем интеграле производя замену $\tau = x_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{1-m_s}$, получим

$$F[f_s](\xi) = F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(s+1)(1-m_s)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\tau\xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)}} \psi_s(\tau)\, d\tau$$
$$= F[\varphi_s](\xi') P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(s+1)(1-m_s)} F[\psi_s]\left(\xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)}\right).$$

Отсюда для $W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)$-нормы функции f_s получим

$$\|f_s\|^2_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} P_{\mathfrak{N}}(\xi) |F[f_s](\xi)|^2\, d\xi \leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} |F[\varphi_s](\xi')|^2 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-2(1+s)(1-m_s)}$$
$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (P_{\mathfrak{N}_0}(\xi') + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_{s_0}}(\xi') + \xi_3^{2l}) \left| F[\psi_s]\left(\xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)}\right) \right|\, d\xi_3 \right) d\xi'. \tag{4.8}$$

По одтельности рассмотрим следующие два случая.

1) Случай $0 \leq s < s_0$. Учитывая соотношения

$$\mathfrak{N}_0 = \frac{2s_0(1-m_s)}{1-q} \mathfrak{N}_s, \;\; \mathfrak{N}_{\mathfrak{s}_0} = \frac{2qs_0(1-m_s)}{1-q} \mathfrak{N}_s$$

получим, что с некоторой постоянной $A_0 > 0$ для $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ выполняется оценка

$$P_{\mathfrak{N}_0}(\xi') + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_{s_0}}(\xi') + \xi_3^{2l}$$

$$\leq A_0 \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{2s_0(1-m_s)}{1-q}} + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{2qs_0(1-m_s)}{1-q}} + \xi_3^{2l} \right). \tag{4.9}$$

Подставляя оценку (4.9) в (4.8) и во внутреннем интеграле производя замену переменной

$$\tau = \xi_3 P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{-(1-m_s)}, \tag{4.10}$$

получим

$$\|f_s\|^2_{W_2^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^3)} \leq$$

$$A_0 \int\limits_{\mathbb{R}^2} |F[\varphi_s](\xi')|^2 \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{q_1} \int\limits_{\mathbb{R}} |F[\psi_s](\tau)|^2 d\tau + P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{q_2} \int\limits_{\mathbb{R}} \tau^{2s_0} |F[\psi_s](\tau)|^2\, d\tau \right.$$

$$\left. + P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{q_3} \int\limits_{\mathbb{R}} \tau^{2l} |F[\psi_s](\tau)|^2 d\tau \right) d\xi', \tag{4.11}$$

где показатели q_1, q_2, q_3 соответственно равны

$$q_1 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + \frac{2s_0(1-m_s)}{1-q} = m_s, \tag{4.12}$$

$$q_2 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2s_0(1-m_s) + \frac{2qs_0(1-m_s)}{1-q} = m_s, \tag{4.13}$$

$$q_3 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2l(1-m_s)$$

$$= m_s + 2(1-m_s)(l-s) - 1 = m_s + \frac{(1-q)(l-s)}{s_0 - (1-q)s} - 1$$

$$= m_s + \frac{l-s}{\dfrac{s_0}{1-q} - s} - 1, \tag{4.14}$$

откуда согласно (3.1)

$$q_3 \leq m_s. \tag{4.15}$$

Из (4.12)–(4.15), учитывая эквивалентность $P^{m_s}_{\mathfrak{N}_s}(\xi')$ и $P_{\mathfrak{A}_s}(\xi')$, немедленно следует оценка (4.7).

2) Случай $s_0 \leq s < l$. Из определения многогранника $\mathfrak{N}$ и его вполне правильности имеем

$$\mathfrak{N}_0 \subset \frac{l}{l-s}\mathfrak{N}_s, \;\; \mathfrak{N}_{s_0} = \frac{l-s_0}{l-s}\mathfrak{N}_s. \tag{4.16}$$

В силу (4.16) с некоторой постоянной $A_1 > 0$ при $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$P_{\mathfrak{N}_0}(\xi') + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_{s_0}}(\xi') + \xi_3^{2l}$$
$$\leq A_1 \left(P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{l}{l-s}} + \xi_3^{2s_0} P_{\mathfrak{N}_s}(\xi')^{\frac{l-s_0}{l-s}} + \xi_3^{2l} \right). \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) в (4.8) и снова производя замену переменной (4.10), получим оценку (4.11) с постоянной A_1 вместо A_0 и с показателями q_1, q_2, q_3, где

$$q_1 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + \frac{l}{l-s} = m_s$$

$$q_2 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2s_0(1-m_s) + \frac{l-s_0}{l-s} = m_s$$

$$q_3 = -2(s+1)(1-m_s) + (1-m_s) + 2l(1-m_s) = m_s.$$

Так как $q_1 = q_2 = q_3 = m_s$, то как и в случае 1) вытекает выполнение оценки (4.7) с постоянной $C_s > 0$.

Нетрудно проверить, что функция $u(x) := \sum_{s=0}^{l-1} f_s(x)$ удовлетворяет соотношениям (4.5), (4.6) с константой $C = \max\limits_{0 \leq s < l} C_s$. $\square$

Доказательство теорем 3.1–3.3 проводится аналогичным образом как это сделано в работе [11] используя теоремы 4.1 и 4.2.

Список литературы

1. *Соболев С.Л. Применения функционального анализа в математической физике* // Наука, Москва. 1988.

2. *Демиденко Г.В. Пространства Соболева и обобщенные решения* // Новосибир. Гос. Унив., Новосибирск. 2015.

3. *Слободецкий Л.Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // *Уч. зап. Ленингр. Гос. Пед. Инст.* 1958. Т. 197. С. 54-112.

4. *Ghazaryan H.G.* The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // *Arm. J. Math.*. 2017. V. 9, N 2. P. 102-145.

5. *Карапетян Г.А.* Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности // *Сиб. матем. журн.* 2017. Т. 58, № 3. С. 573-590.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 144-155
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 144-155

6. *Karapetyan G.A.* Integral representations of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on the plane with one anisotropy vertex // *J. Contemp. Math. Anal.* 2016. V. 51, N 6. P. 269-281.

7. *Karapetyan G.A., Arakelyan M.K.* Estimation of multianisotropic kernels and their application to the embedding theorems // *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* 2017. V. 171, N 1. P. 48-56.

8. *Karapetyan G.A., Petrosyan H.A.* Embedding theorems for multianisotropic spaces with two vertices of anisotropicity // *Proc. YSU A: Phys. Math. Sci.* 2017. V. 51, N 1. P. 29-37.

9. *Karapetyan G. A.* An integral representation and embedding theorems in the plane for multianisotropic spaces // *J. Contemp. Math. Anal.* 2017. V. 52, N 6. P. 267-275.

10. *Karapetyan G.A., Arakelyan M.K.* Embedding theorems for general multianisotropic spaces // *Math. Notes.* 2018. V. 104, N 3. P. 422-438.

11. *Хачатурян М.А., Акопян А.Р.* О следах функций из мультианизотропных пространств Соболева // *Вест. Русск-Арм. Унив., Физ.-Мат. и Ест. Науки.* 2021. Т. 1. С. 56-77.

References

1. *Sobolev S.L. Some applications of functional analysis in mathematical physics* // Nauka, Moscow. 1988.

2. *Demidenko G.V. Sobolev spaces and generalized solutions* // Novosibirsk State Univ., Novosivirsk. 2015.

3. *Slobodecki L.N.* Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems for partial differential equations // *Uch. Zap. Leningr. Gos. Ped. Inst.* 1958. V. 197, P. 54-112.

4. *Ghazaryan H.G.* The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // *Arm. J. Math..* 2017. V. 9, N 2. P. 102-145.

5. *Karapetyan G.A.* Integral representation and embedding theorems for n-dimensional multianisotropic spaces with one anisotropy vertex // *Sib. Matem. J.* 2017. V. 58, N 3. P. 573-590.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 144-155
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 144-155

6. *Karapetyan G.A.* Integral representations of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on the plane with one anisotropy vertex // *J. Contemp. Math. Anal.* 2016. V. 51, N 6. P. 269-281.

7. *Karapetyan G.A., Arakelyan M.K.* Estimation of multianisotropic kernels and their application to the embedding theorems // *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* 2017. V. 171, N 1. P. 48-56.

8. *Karapetyan G.A., Petrosyan H.A.* Embedding theorems for multianisotropic spaces with two vertices of anisotropicity // *Proc. YSU A: Phys. Math. Sci.* 2017. V. 51, N 1. P. 29-37.

9. *Karapetyan G. A.* An integral representation and embedding theorems in the plane for multianisotropic spaces // *J. Contemp. Math. Anal.* 2017. V. 52, N 6. P. 267-275.

10. *Karapetyan G.A., Arakelyan M.K.* Embedding theorems for general multianisotropic spaces // *Math. Notes.* 2018. V. 104, N 3. P. 422-438.

11. *Khachaturyan M.A., Akopyan A.R.* On the traces of functions from multianisotropic Sobolev spaces // *Vestn. Russk.-Arm. Univ., Fiz.-Mat. Est. Nauki.* 2021. N 1, P. 56-77.

Информация об авторе

Микаел Артурович Хачатурян, аспирант, старший преподаватель

Scopus Author ID 57208499055

Author Information

Michael A. Khachaturyan, Graduate Student, Senior Lecturer

Scopus Author ID 57208499055

Статья поступила в редакцию 29.05.2023;
одобрена после рецензирования 30.12.2023; принята к публикации 17.05.2024

The article was submitted 29.05.2023;
approved after reviewing 30.12.2023; accepted for publication 17.05.2024